Aufgabe 26:

Grundgesamtheit mit N = 5

a) arithmetisches Mittel (m) und Varianz (s^2) der Grundgesamtheit

i	x_i	f_i	$x_i - m$	$(x_i - m)^2 \cdot f_i$
1	2	1	-4	16
2	4	1	-2	4
3	6	1	0	0
4	8	1	2	4
5	10	1	4	16
Σ	**30**		**0**	**40**

$$m = \frac{1}{N} \cdot \sum x_i = \frac{1}{5} \cdot 30 = 6$$

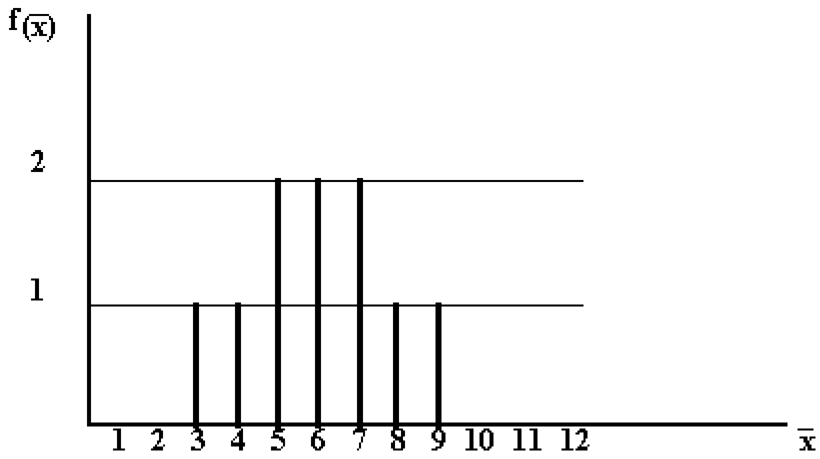
$$VAR(X) = s_{(x)}^{\;2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - m)^2 \cdot f_i = \frac{1}{5} \cdot 40 = 8$$

b) Auswahlen ohne Wiederholung vom Umfang n = 2 werden gezogen.

Exakte Verteilung der Stichprobenmittelwerte und graphische Darstellung.

i	**Stichprobe** $n = 2$	$\overline{x}_i$	$(\overline{x}_i - m_{(\overline{x})})$	$(\overline{x}_i - m_{(\overline{x})})^2$
1	2,4	3	-3	9
2	2,6	4	-2	4
3	2,8	5	-1	1
4	2,10	6	0	0
5	4,6	5	-1	1
6	4,8	6	0	0
7	4,10	7	1	1
8	6,8	7	1	1
9	6,10	8	2	4
10	8,10	9	3	9
Σ		**60**	**0**	**30**

graphische Darstellung als Stabdiagramm:



c) Bestimmung von Mittelwert und Varianz der Stichprobenmittelwerte

$$m_{(\bar{x})} = \frac{1}{10} \cdot \sum \bar{x}_i = \frac{1}{10} \cdot 60 = 6 = m$$
$$VAR(\bar{x}) = \frac{1}{10} \cdot \sum \left(\bar{x}_i - m_{(\bar{x})} \right)^2 = \frac{1}{10} \cdot 30 = 3$$
$$s_{(\bar{x})} = \sqrt{VAR_{(\bar{x})}} = \sqrt{3} = 1{,}73$$

Vergleichen wir die errechneten Ergebnisse mit den in den Formeln (6.1), (6.3) und (6.5) abgeleiteten Ergebnissen, so gilt:

$$m(\bar{x}) = m = 6$$
$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{8}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5-2}{4}} = 1{,}73$$

d) Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Stichprobenmittel Werte zwischen 4 und 6 annimmt.

$$P(4 \le \bar{x} \le 6) P(\bar{x} = 4) + P(\bar{x} = 5) + P(\bar{x} = 6) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = 0{,}5$$

Aufgabe 27:

a) Richtig: $E(\bar{x}) = m_{\bar{x}} = m$

b) Falsch: $E(s_i) = \frac{s}{\sqrt{n}}$ und nicht $E(s_i) = s$

c) Falsch: $s_{\bar{x}} \neq \frac{1}{s^2}$

d) Falsch: $s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$

e) Falsch: $\frac{s}{\bar{x}} \neq \frac{s}{m}$

f) Das Maximum der Dichte liegt an der Stelle m: $Max[f(x)] = f(m)$

g) Richtig: $f(x_i) = \frac{1}{s} \cdot f(z = \frac{x_i - m}{s})$

$$f(x_i = m) = \frac{1}{s} \cdot f(z = 0)$$

Aufgabe 28 a), b):

Stichprobenverteilung eines Mittelwertes

Verteilung des Stichprobenparameters $\bar{x}$ (arithmetisches Mittel).
$\bar{x}$ ist normalverteilt.

a) „mit Zurücklegen" bzw. $\frac{36}{1200} < 0{,}05 \Rightarrow$ kein Endlichkeitsfaktor.

$$z_i = \frac{\bar{x}_i - m}{s_{\bar{x}}}, \quad s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{6}{6} = 1$$

a1) $z_u = \frac{59 - 60}{1} = -1; \quad z_o = \frac{61 - 60}{1} = 1$

$P(59 < \bar{X} < 61) = P(-1 < Z < 1) = 0{,}6827$
Stichproben werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6827 Mittelwerte zwischen 59
und 61 liefern.

a2) $P(\bar{x}_u < \bar{X} < \bar{x}_o) = P(-z_0 < Z < +z_0) = 0{,}9$

$P(Z > +z_0) = 0{,}05$
$\Rightarrow z_0 = \pm 1{,}65$

$$\pm z_0 = \frac{\bar{x} - m}{s_{\bar{x}}}$$
$\Rightarrow \bar{x} = m \pm z_0 \cdot s_{\bar{x}}$

$\overline{x_u} = 60cm - 1{,}65 \cdot 1 = 58{,}35cm$
$\overline{x_o} = 60cm + 1{,}65 \cdot 1 = 61{,}65cm$

$\Rightarrow P(58{,}35 < \bar{x} < 61{,}65) = 0{,}9$

Die Stichproben liegen mit 90% Wahrscheinlichkeit im Intervall $58{,}35 < \bar{x} < 61{,}65$

b) „ohne Zurücklegen“ und $\frac{100}{1200} > 0{,}05 \Rightarrow$ Endlichkeitsfaktor!

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{6}{10} \cdot \sqrt{\frac{1100}{1199}} = 0{,}575$$

b1) $P(59 < \bar{x} < 61) = P(-z_0 < Z < +z_0)$

$z_u = \frac{59-60}{0{,}575} = -1{,}74$; $z_o = \frac{61-60}{0{,}575} = 1{,}74$
$P(59 < \bar{x} < 61) = P(-1{,}74 < z < 1{,}74) = 0{,}9181$

Stichproben werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9181 Mittelwerte zwischen 59 und 61 cm liefern.

b2) $P(\bar{x}_u < \bar{X} < \bar{x}_o) = P(-z_0 < Z < +z_0) = 0{,}95$

$$P(Z > +z_0) = 0{,}025$$
$$\Rightarrow z_0 = \pm 1{,}96$$

$$\pm z_0 = \frac{\overline{x} - m}{s_{\overline{x}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$
$$\Rightarrow \overline{x} = m \pm z_0 \cdot s_{\overline{x}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\overline{x_u} = 60cm - 1{,}96 \cdot \frac{6}{10} \cdot \sqrt{\frac{1200-100}{1200-1}} = 58{,}873cm$$
$$\overline{x_o} = 60cm + 1{,}96 \cdot \frac{6}{10} \cdot \sqrt{\frac{1200-100}{1200-1}} = 61{,}127cm$$

$$\Rightarrow P(58{,}873 < \overline{x} < 61{,}127) = 0{,}95$$

95% allerStichprobenmittelwerte liegen im Intervall $58{,}873 < \overline{x} < 61{,}127$.

Aufgabe 29:

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Stichprobenvarianz im Bereich $0{,}005325 < \hat{s}^2 < 0{,}01587$?

gegeben: $\sigma^2 = 0{,}01$; $\phi = 19$
gesucht:

$P(0{,}005325 < \hat{s}^2 < 0{,}01587) = ?$

$$C_u^2 = \frac{f}{s^2} \cdot \hat{s}_u^2 = \frac{19}{0{,}01} \cdot 0{,}005325 = 10{,}1175$$

$$C_o^2 = \frac{f}{s^2} \cdot \hat{s}_o^2 = \frac{19}{0{,}01} \cdot 0{,}01587 = 30{,}153$$

$P(10{,}1175 < \chi^2 < 30{,}153) = 0{,}9$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Varianz des Durchmessers der Wellen im genannten Bereich liegen, beträgt 90%.

b) Welche Varianzen werden mit der Wahrscheinlichkeit aus Aufgabe a) in einer Stichprobe
n=50 erreicht?

$\phi=49$

$$z=\sqrt{2c^2}-\sqrt{2f-1}$$
$$z=\sqrt{2\frac{f}{s^2}\cdot\hat{s}^2}-\sqrt{2f-1} \qquad ;\left[\pm z+\sqrt{2f-1}=\sqrt{2c^2\cdot\hat{s}^2}\right]$$

$$\hat{s}_u=\frac{\sqrt{2f-1}\pm z}{\sqrt{2f}}\cdot s=\frac{\sqrt{2\cdot 49-1}-1{,}65}{\sqrt{2\cdot 49}}\cdot 0{,}1=0{,}082821$$

$$\hat{s}_o=0{,}1162 \qquad ;\ E(s^2)=\frac{n-1}{n}\cdot s^2$$

$$\hat{s}_u^2=0{,}006859$$
$$\hat{s}_o^2=0{,}01349$$

Daraus folgt
für $-z=-1{,}65\Rightarrow\hat{s}_u=0{,}0828mm$ und
für $+z=+1{,}65\Rightarrow\hat{s}_o=0{,}1162mm$

$$P\left(0{,}0069mm^2\leq\hat{s}_0^2\leq 0{,}0135mm^2\right)=0{,}9.$$

Die Varianzen werden mit 90%iger Wahrscheinlichkeit zwischen 0,0069 und 0,0135 liegen.

Aufgabe 28 c)

c) n < 30, X ist in der GG normalverteilt $\Rightarrow\overline{X}$ normalverteilt

$$s_{\bar{x}}=\frac{6}{\sqrt{26}}=1{,}18$$

c1) $P(58<\bar{x}<61)=P(-z_0<Z<+z_0)$

$$z_u=\frac{58-60}{1{,}18}=-1{,}69;\ z_o=\frac{61-60}{1{,}18}=0{,}85$$
$$P(58<\bar{x}<61)=P(-1{,}69<z<0{,}85)=0{,}7568$$

Stichproben werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7568 Mittelwerte zwischen 58
und 61 cm liefern.

c2) $P(\overline{x}_u < \overline{X} < \overline{x}_o) = P(-z_0 < Z < +z_0) = 0{,}9$

$P(Z > +z_0) = 0{,}05$

$\Rightarrow z_0 = \pm 1{,}65$

$$\pm z_0 = \frac{\overline{x} - m}{s_{\overline{x}}} \Rightarrow \overline{x} = m \pm z_0 \cdot s_{\overline{x}}$$

$$\overline{x_u} = 60cm - 1{,}65 \cdot 1{,}18 = 58{,}053cm$$
$$\overline{x_o} = 60cm + 1{,}65 \cdot 1{,}18 = 61{,}947cm$$

$$\Rightarrow P(58{,}053 < \overline{x} < 61{,}947) = 0{,}9$$

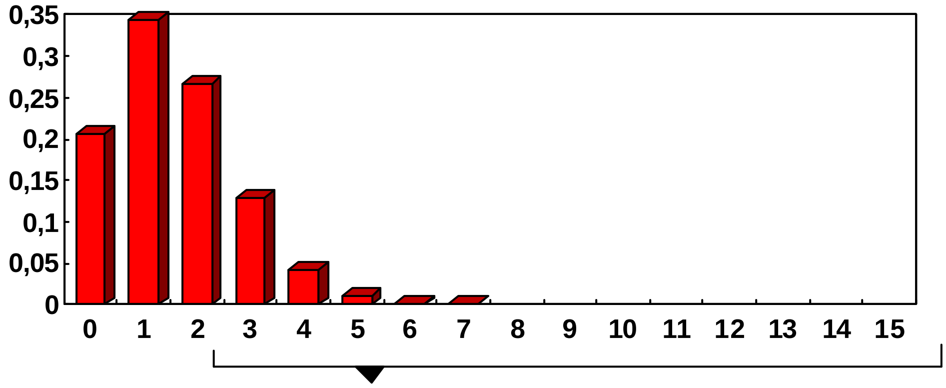
Die Stichprobenmittelwerte liegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% im Intervall $58{,}053 < \overline{x} < 61{,}947$.

Aufgabe 30:

Stichprobenverteilung der Anzahl der Träger eines Merkmals

In einer „sehr großen Grundgesamtheit“ ($N = \infty$) ist bekannt, daß 10% „Gelbwähler“ und 90% „Nicht-Gelbwähler“ sind, also $p = 0{,}1$ und $1 - p = 0{,}9$.

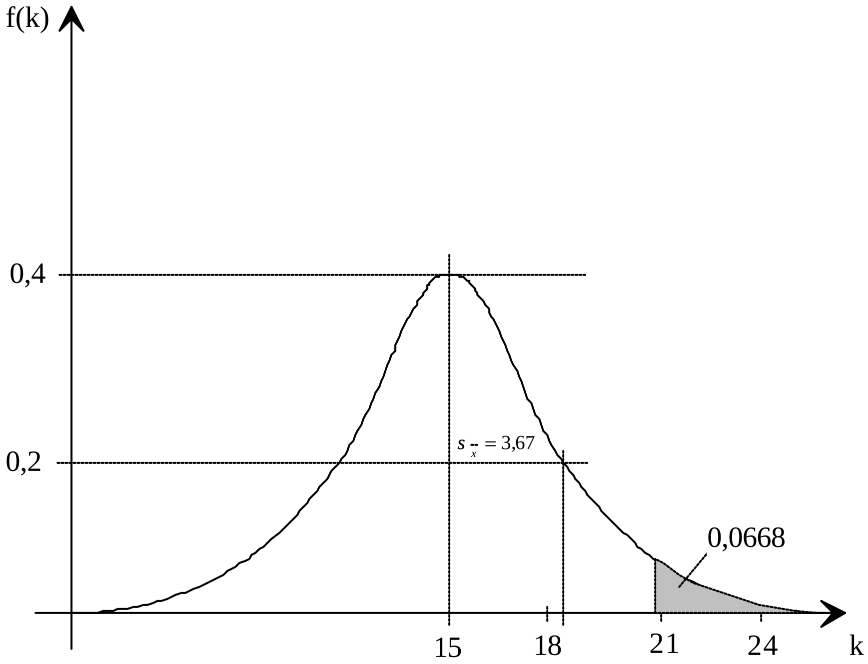
a) **Binomialverteilung mit n = 15 und p =0,1**



$$P(k \geq 3) = P(k = 3) + P(k = 4) \ldots + P(k = 15) \; oder$$
$$P(k \geq 3) = 1 - \left(P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2)\right)$$
$$P(k \geq 3) = 1 - \left(B_{(15;0;0,1)} + B_{(15;1;0,1)} + B_{(15;2;0,1)}\right)$$
$$P(k \geq 3) = 1 - \left(\binom{15}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{14} + \binom{15}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{13}\right)$$
$$P(k \geq 3) = 1 - (0{,}20589 + 0{,}34315 + 0{,}26690) = 0{,}18406 \approx 18{,}41\%$$

d.h. P(Anteil der Stichprobe über 20%) = 0,184

b) $n \cdot p \cdot (1-p) = 150 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 13{,}5 \; > \; 9$ ==> Approximation durch die Normalverteilung, Stetigkeitskorrektur ist zu beachten



$$P(k \geq 21) = P\left(z \geq \frac{k - \frac{1}{2} - E(K)}{s_k} \right) = \frac{k - \frac{1}{2} - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

$$= P\left(z > \frac{21 - 0{,}5 - 15}{3{,}67} = 1{,}499 \right)$$

$$= 0{,}0668$$

d.h. P(der Anteil in der Stichprobe ist größer als 14%) = 0,0668

Aufgabe 31:

Stichprobenverteilung eines Anteilwertes

N.B.: Im Buch ist diese Aufgabe mit einem Druckfehler versehen. Es muß 95% statt 90% heißen. Zwar kann man die Aufgabe auch so errechnen, aber mit einem symmetrischen Intervall um π ist es für die StudentInnen übersichtlicher und einfacher zu verstehen.

Von $N = 1000$ Wellen, die täglich gefertigt werden, genügen 100 nicht den Qualitätsanforderungen

a) Es wird eine Stichprobe mit $n = 100$ gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind zwischen 85% und 95% der Wellen „von ausreichender Qualität“?

$p_{Ausschuß} = \frac{100}{1000} = 0{,}1$

$p_{o.k} = 1 - p_{Ausschuß} = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

Die Wahrscheinlichkeit in der GG für intakte Wellen beträgt 0,9.

$n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 9$, also ist p normalverteilt

EF, weil $\frac{n}{N} = \frac{100}{1000} = 0{,}1 > 0{,}05$

$$z = \frac{p - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

$$P\left(\frac{p_u - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \le z_0 \le \frac{p_o - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \right) = ?$$

$$P\left(\frac{0{,}85 - 0{,}9}{\sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{100}} \cdot \sqrt{\frac{1000-100}{1000-1}}} \le z_0 \le \frac{0{,}95 - 0{,}9}{\sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{100}} \cdot \sqrt{\frac{1000-100}{1000-1}}} \right)$$

$\Rightarrow P(-1{,}76 \le z_0 \le +1{,}76) = 1 - 2 \cdot 0{,}0392 = 0{,}922$.

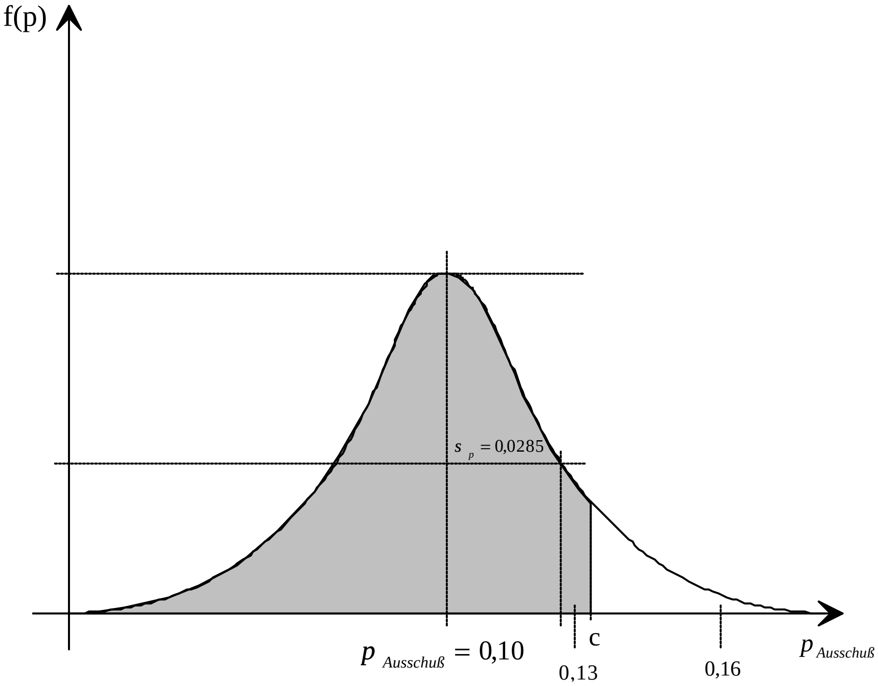
Die Wahrscheinlichkeit, daß zwischen 85% und 95% Wellen aus der Stichprobe von ausreichender Qualität sind, beträgt 92,2%.

c)

In a) wurde errechnet, daß mit 92,2%iger Wahrscheinlichkeit ein Ausschußanteil von 10-15% entsteht. Jetzt berechnen wir, wie hoch der Ausschußanteil c mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% höchstens ist.

$P(p \le c) = 0{,}9$

Die Varianz ist ≥ 9, also findet die Normalverteilung Anwendung. Außerdem muß der Endlichkeitsfaktor verwendet werden, da $\frac{n}{N} = 0{,}1 > 0{,}05$. Da p im Gegensatz zu k eine stetige Variable ist, bleibt die Stetigkeitskorrektur unberücksichtigt. Der Wert von „c“ entspricht dem maximalen Ausschußanteil in der Stichprobe. Aus $a = 0{,}1$ folgt $Z_a = 1{,}28$.



Daraus folgt:

$$z = \frac{c - p_{Ausschuß}}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

Nach Umstellung ergibt sich

$$c = p + z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 0{,}1 + 1{,}28 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{100}} \cdot \sqrt{\frac{900}{999}} = 0{,}1364 \approx 13{,}64\%$$

Bei $n = 100$ wäre der Ausschußanteil mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% nicht größer als 13,64%.