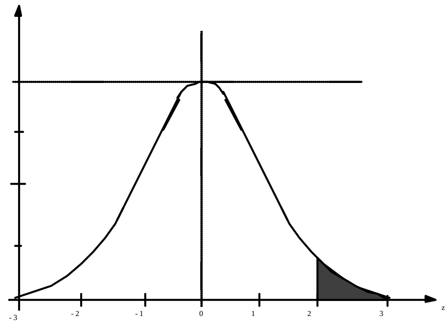
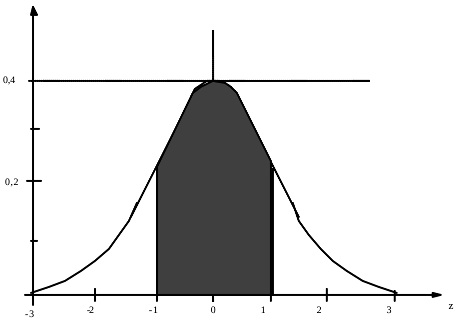
Aufgabe 17:

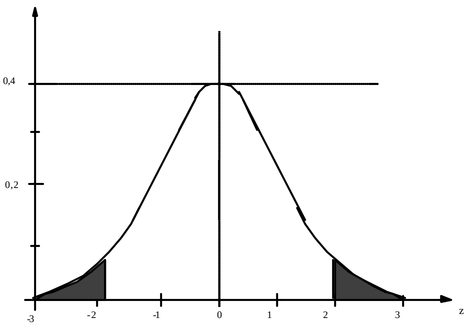
a) $P(Z > 2) = 0{,}0228$



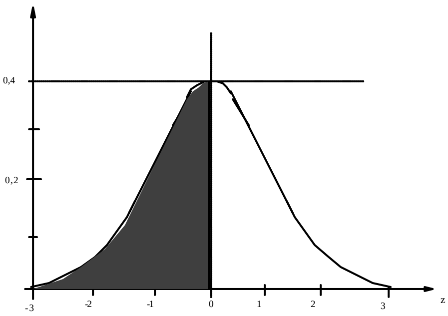
b) $P(-1 < Z < +1) = 1 - (2 \cdot 0{,}158655) = 1 - 0{,}31731 = 0{,}68269 = 68{,}269\%$



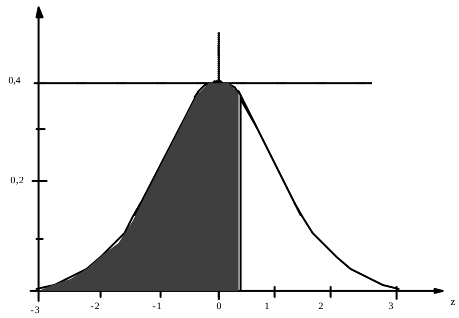
c) $P[(Z < -1{,}64) \cup (Z > +1{,}64)] = 2 \cdot 0{,}050503 = 0{,}101006$



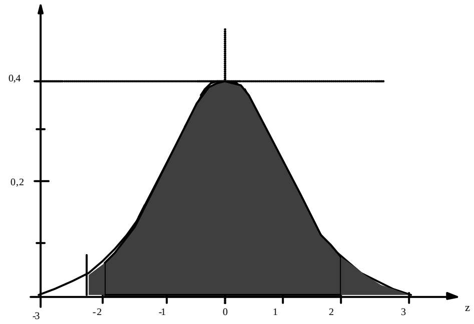
d) $P(Z < A) = 0{,}5 \Rightarrow A = 0$



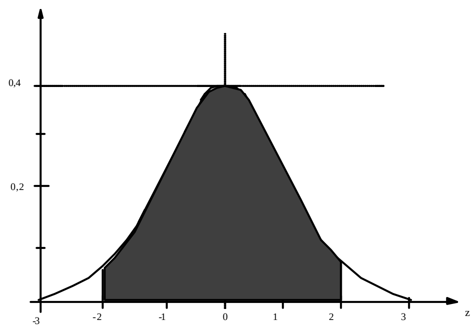
e) $P(Z<B)=0{,}64 \Rightarrow B=0{,}36$



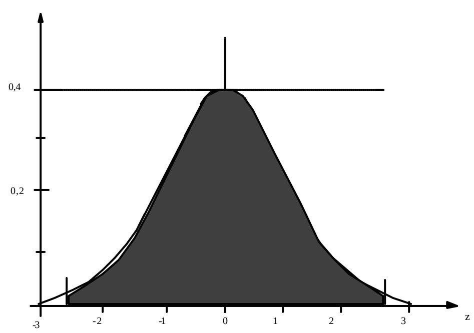
f) $P(Z>C)=0{,}99 \Rightarrow C=-2{,}33$



g) $P(-D<Z<+D)=0{,}95 \Rightarrow D=\pm 1{,}96$



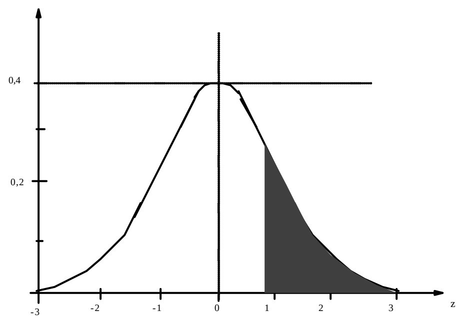
h) $P(-E<Z<+E)=0{,}99 \Rightarrow E=\pm 2{,}58$



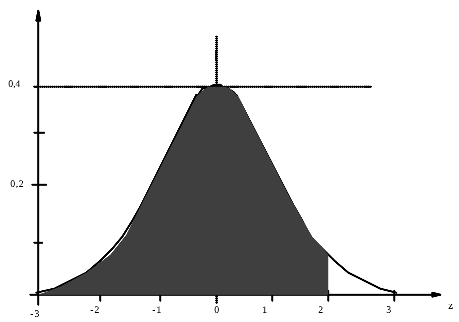
Aufgabe 18:

$m = 12, s = 4$

a) $P(x > 15) = P(Z > \frac{15-12}{\sqrt{16}}) = P(Z > \frac{3}{4}) = 0{,}2266$

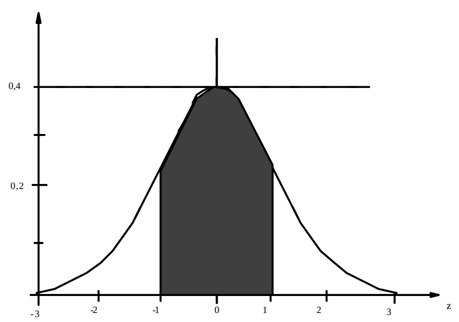


b) $P\left(Z < \frac{20-12}{\sqrt{16}}\right) = P(Z < 2) = 1 - P(Z > 2) = 1 - 0{,}022750 = 0{,}97725$

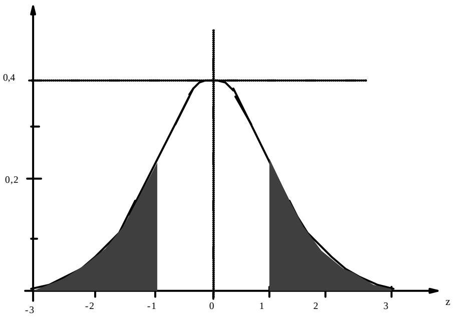


c) $P(8 < X < 16) = P\left(\frac{8-12}{4} < Z < \frac{16-12}{4}\right) = p(-1 < z < +1)$

$= 1 - 2 \cdot P(Z > 1) = 1 - (2 \cdot 0{,}158655) = 0{,}68296$

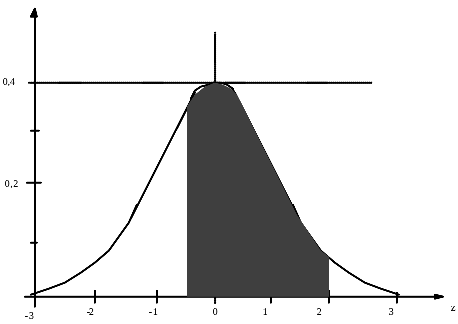


d) $P[(X < 8) \cup (X > 16)] = 2 \cdot P(Z > 1) = 2 \cdot 0{,}158655 = 0{,}31731$

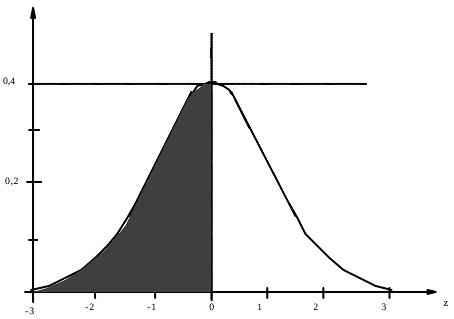


e) $P(10 < X < 20) = P\left(\frac{10-12}{4} < Z < \frac{20-12}{4}\right) = P\left(-\frac{1}{2} < Z < 2\right)$

$= 1 - P(Z > 0{,}5) = 1 - (0{,}308538 + 0{,}02275) = 0{,}668712$



f) $P(0 < X < 12) = P\left(\frac{0-12}{4} < Z < \frac{12-12}{4}\right) = P(-3 < Z < 0) = (0{,}5 - 0{,}00135) = 0{,}49865$



Aufgabe 19:

Vorbemerkung: Bei Aufgabe 18 ging es darum die x_i - Werte in die Transformationsformel $z_i = \frac{x_i - m}{s}$ einzusetzen und P zu berechnen. In Aufgabe 19 führt die Lösung über eine Auflösung der Transformationsformel nach m.

Auf welchen Wert m muß der Kaffeeautomat eingestellt werden, damit Tassen, die nicht mehr als 25cl fassen, in nicht mehr als 1% der Fälle überlaufen?
Es liegt eine Normalverteilung mit $s = 1{,}5cl$ vor.

$P(x > 25) = 0{,}01$

==> $P(Z > Z_i) = 0{,}01$

bei p = 0,01 ist z =2,33

aus $Z_i = \frac{x_i - m}{s}$

folgt $m = x_i - z_i \cdot s$, also $m = 25 - 2{,}33 \cdot 1{,}5 = 21{,}505$

Der Automat muß also auf 21,505cl eingestellt werden, damit die Tassen nur in 1% der Fälle überlaufen.

Aufgabe 20:

$m = 152ccm \quad s = 2ccm$

Der Kunde bestellt einen Posten Gesichtswasser, die Flasche zu 150ccm mit einer Toleranz von 4ccm nach oben und unten. D.h. die Füllmenge darf zwischen 146ccm und 154ccm liegen. Daraus folgt:

$P[(x < 146ccm) \cup (x > 154ccm)] = ?$, wenn gefragt ist, wie wahrscheinlich es ist, daß eine zufällig herausgegriffene Flasche außerhalb der Toleranzen liegt.

$$P\left[\left(z < \frac{146 - 152}{2}\right) \cup \left(z > \frac{154 - 152}{2}\right)\right] = P[(z < -3) \cup (z > 1)] = 0{,}00135 + 0{,}158655$$
$$= 0{,}160005 = 16{,}0005\%$$

Aufgabe 21:

Eine Erhebung unter 200 Studenten hat folgende Verteilung der Mietausgaben ergeben:

Mietausgaben von ...DM bis unter ...DM	**Befragte in %**
unter 130	8,5
130-150	14,5
150-170	20,0
170-190	22,5
190-210	14,5
210-230	8,5
über 230	11,5

S	**100,0**

a) Vergleich der empirischen Verteilung mit einer „theoretischen“ Normalverteilung mit

$m = 175,-DM$ und $s = 35,-DM$

$$\Rightarrow \quad P(x < 130) = P\left(z < \frac{130-175}{35}\right) = P(z < -1{,}29) = 0{,}098525$$

$$\Rightarrow P(130 \le x < 150) = P\left(\frac{130-175}{35} \le z < \frac{150-175}{35}\right)$$

$$= P(-1{,}29 \le z < -0{,}71) = 0{,}238852 - 0{,}098525 = 0{,}140327$$

$$\Rightarrow P(150 \le x < 170) = P\left(\frac{150-175}{35} \le z < \frac{170-175}{35}\right)$$

$$= P(-0{,}71 \le z < -0{,}14) = 0{,}444330 - 0{,}238852 = 0{,}205478$$

$$\Rightarrow P(170 \le x < 190) = P\left(\frac{170-175}{35} \le z < \frac{190-175}{35}\right)$$

$$= P(-0{,}14 \le z < 0{,}43) = 1 - 0{,}333598 - 0{,}444330 = 0{,}222072$$

$$\Rightarrow P(190 \le x < 210) = P\left(\frac{190-175}{35} \le z < \frac{210-175}{35}\right)$$

$$= P(0{,}43 \le z < 1) = 0{,}333598 - 0{,}158655 = 0{,}174943$$

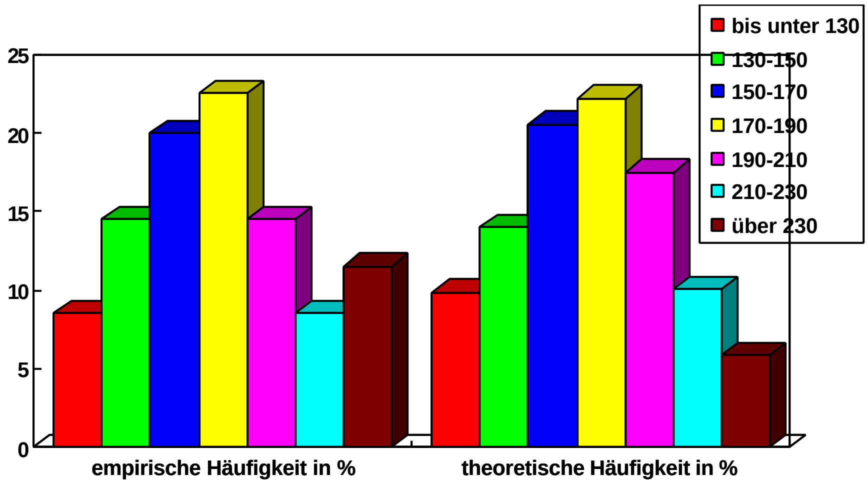
$$\Rightarrow P(210 \le x < 230) = P\left(\frac{210-175}{35} \le z < \frac{230-175}{35}\right)$$

$$= P(1 \le z < 1{,}57) = 0{,}158655 - 0{,}058208 = 0{,}100447$$

$$\Rightarrow P(x \ge 230) = P\left(z \ge \frac{230-175}{35}\right) = P(z \ge 1{,}57) = 0{,}058208$$

Mietausgaben von ...DM bis unter ...DM	**Befragte in %**	**Z-Werte**	$P(Z)$	**empirische Häufigkeit in %**
unter 130	8,5	$z < -1{,}29$	0,098525	8,5
130-150	14,5	$-1{,}29 \le z < -0{,}71$	0,140327	14,5
150-170	20,0	$-0{,}71 \le z < -0{,}14$	0,205478	20,0
170-190	22,5	$-0{,}14 \le z < 0{,}43$	0,222072	22,5
190-210	14,5	$0{,}43 \le z < 1$	0,174943	14,5
210-230	8,5	$1 \le z < 1{,}57$	0,100447	8,5
über 230	11,5	$z \ge 1{,}57$	0,058208	11,5
S	**100,0**		**1,00**	**100,0**

graphische Darstellung als Säulendiagramm:



Die theoretische Verteilung unter Annahme von $m = 175,- DM$ und $s = 35,- DM$ ähnelt sehr der empirischen Verteilung aus der Umfrage.

b) Mindestmiete der oberen 5% bzw. 1% und Höchstmiete der unteren 5% bzw. 1%

Der Grenze zu den unteren/oberen 5% entspricht ein Z-Wert von $\pm 1,65$ und der Grenze zu den unteren/oberen 1% entspricht ein Z-Wert von $\pm 2,33$.

$\frac{x^u_{(1\%)} - 175}{35} = -2,33 \Rightarrow x^u_{(1\%)} = 175 - 2,33 \cdot 35 = 93,45 DM$ zahlt das unterste % höchstens.

$\frac{x^o_{(1\%)} - 175}{35} = +2,33 \Rightarrow x^o_{(1\%)} = 175 + 2,33 \cdot 35 = 256,55 DM$ zahlt das oberste % mindestens.

$\frac{x^u_{(5\%)} - 175}{35} = -1,65 \Rightarrow x^u_{(5\%)} = 175 - 1,65 \cdot 35 = 117,25 DM$ zahlen die unteren 5% höchstens.

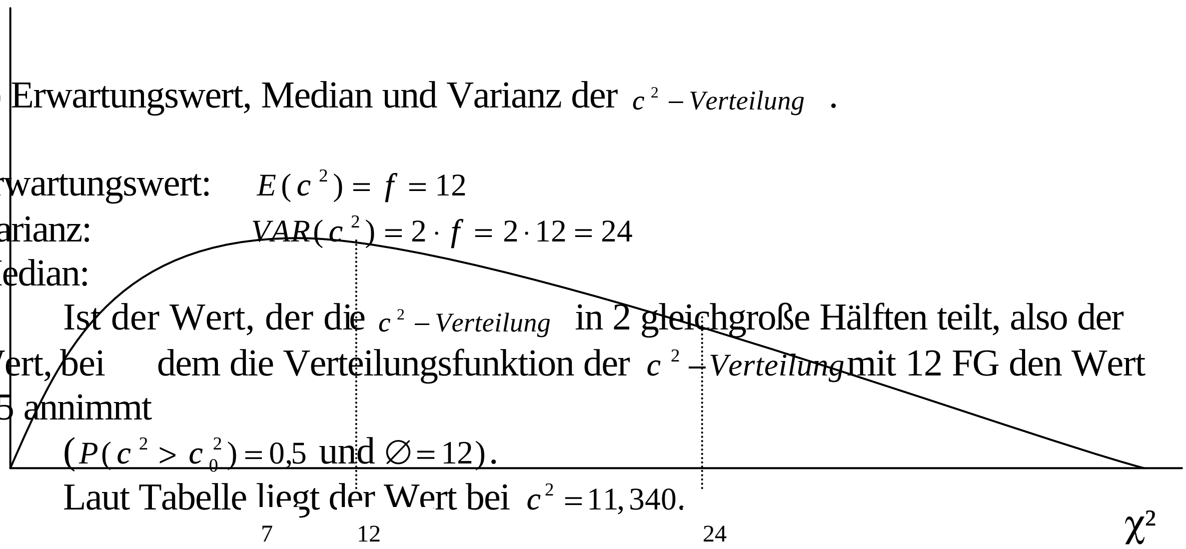
$\frac{x^o_{(5\%)} - 175}{35} = +1,65 \Rightarrow x^o_{(5\%)} = 175 + 1,65 \cdot 35 = 232,75 DM$ zahlen die obersten 5% mindestens.

Aufgabe 22:

Gegeben ist eine $c^2 - Verteilung$ mit $f = 12 FG$

a) Das Maximum der $c^2 - Verteilung$ liegt bei $Mod(c^2) = f - 2$, also bei $12 - 2 = 10$

Skizze:



b) Erwartungswert, Median und Varianz der $c^2 - Verteilung$.

Erwartungswert: $E(c^2) = f = 12$
Varianz: $VAR(c^2) = 2 \cdot f = 2 \cdot 12 = 24$
Median:

Ist der Wert, der die $c^2 - Verteilung$ in 2 gleichgroße Hälften teilt, also der Wert, bei dem die Verteilungsfunktion der $c^2 - Verteilung$ mit 12 FG den Wert 0,5 annimmt

$(P(c^2 > c_0^2) = 0{,}5$ und $\varnothing = 12)$.

Laut Tabelle liegt der Wert bei $c^2 = 11{,}340$.

c) <u>Ein</u> Intervall, in dem 95% der Werte erwartet werden:

$\Rightarrow \quad P(0 \leq c^2 \leq 21{,}026) = 0{,}95$
$\Rightarrow \quad P(4{,}404 \leq c^2 \leq 23{,}337) = 0{,}95$
$\Rightarrow \quad P(5{,}226 \leq c^2 \leq \infty) = 0{,}95$

d) Wahrscheinlichkeit, daß die Variable in etwa Werte zwischen 5 und 25 annimmt:

$p\left(5 \leq c^2 \leq 25\right) = F\left(c^2 \leq 25\right) - F\left(c^2 \leq 5\right) \approx (1-0{,}01) - (1-0{,}95) = 0{,}99 - 0{,}05 = 0{,}94$.
Eine genaue Angabe ist nicht möglich, daher wurden die Werte 26,217 und 5,226 genommen.

Aufgabe 23:

Die „Panama-Buslinie“ mit einem Bus betreibt wöchentlich eine Dschungeldurchquerung. Die Kostenfunktion für eine Unpünktlichkeit ist
$K = 50 \cdot \sum d_i^2$ mit i=1,...,N,
wobei d die Abweichung in der Ankunftzeit ist. d ist außerdem normalverteilt mit $E(d_i) = 0$ und $s = 1$ (in Tagen).

Daraus resultiert, daß $\sum d_i^2$ als „Summe der Abstandsquadrate“ von der Ankunftzeit c^2 verteilt ist. Die Kostenfunktion lautet also
$K = 50 \cdot c^2$.
Es liegt eine $c^2 - Verteilung$ mit N Freiheitsgraden ($f = N$) vor, weil jede Dschungeldurchfahrt von den vorangegangenen Fahrten unabhängig stattfindet.

a) Wenn also festgestellt werden soll, mit welchen Extrakosten bei einer Fahrt ($f = 1$) mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% höchstens gerechnet werden muß, dann ergibt sich aus der $c^2 - Tabelle$ bei $f = 1$ wegen
$P(c^2 < c_0^2) = 0{,}75 \Rightarrow P(c^2 > c_0^2) = 0{,}25$ ein $c^2 - Wert$ von 1,323.

Die Extrakosten für eine Fahrt betragen demnach $K = 50 \cdot 1{,}323 = 66{,}15DM$.

b) Wahrscheinlichkeit, mit der Extrakosten von mehr als DM 250 ausgeschlossen werden können beträgt (wiederum bei $f = 1$)
$K = 50 \cdot c^2 \leq 250DM$
$\Rightarrow c^2 \leq 5$
Bei $f = 1$ ergibt sich dafür eine Wahrscheinlichkeit von etwa 0,975.

c1) bei N = 26 $K \leq 2100\,DM$

Da die Fahrten nach wie vor unabhängig voneinander stattfinden, sollte die Kostenkalkulation davon ausgehen, daß die c^2-Verteilung 26 FG hat. Die Kostenfunktion sieht also wie folgt aus:

$K = 50 \cdot c^2 \leq 2100, f = 26$

$\Rightarrow c^2 \leq 42$

$\Rightarrow F\left(c^2 \leq 42\right) \approx 1 - 0{,}025 = 0{,}975$

c2) bei N = 52, $K \leq 3100\,DM$

$K = 50 \cdot c^2 \leq 3100, f = 52$

$\Rightarrow c^2 \leq 62$

Bei $f = 52$ approximieren wir durch die Standardnormalverteilung über

$Z = \sqrt{2c^2} - \sqrt{2f-1} = \sqrt{2 \cdot 62} - \sqrt{2 \cdot 52 - 1} = 11{,}14 - 10{,}15 = 0{,}987$

$P(Z > 0{,}99) = 1 - 0{,}161087 = 0{,}839$

Aufgabe 24:

Vorbemerkungen:
Die t-Verteilung ist eine stetige, unimodale und symmetrische Verteilung.
Die Prüfgröße ist abhängig von f (Anzahl der Freiheitsgrade) mit:

$E(t) = 0$ für $f \geq 2$ (= max.) und

$VAR(t) = \frac{f}{f-2}$ für $f \geq 3$

Bei $f \geq 30$ ist die t-Verteilung hinreichend genau durch die Standardnormalverteilung approximierbar.

t-Verteilung mit $f = 20FG$

a) $P(-1{,}325 \leq t \leq 1{,}725) = 1 - P(t > 1{,}325) - P(t > 1{,}725), f = 20$

$= (1 - 0{,}1) - 0{,}05 = 0{,}85$

b) $P(t > 2{,}5) \approx 0{,}01$

c) $P(t < -0{,}86) = 0{,}2$

d) $P(-A \leq t \leq +A) = 0{,}99$

bedeutet, daß an der rechten und linken Seite der t-Verteilung Flächenanteile von je 0,005 entfernt werden, also ist $A = \pm 2{,}845$

Aufgabe 25:

Vergleich der Güte der Approximation einer t-Verteilung mit 20,30,50 und ∞FG mit dem Wert der Standardnormalverteilung im 99. Zentil.

$P(t \le t_0) = 0{,}99$

$f = 20FG \Rightarrow t_0 = 2{,}528$

$f = 30FG \Rightarrow t_0 = 2{,}457$

$f = 50FG \Rightarrow t_0 = 2{,}403$

$f = \infty FG \Rightarrow t_0 = 2{,}327$

$P(z \le z_0) = 0{,}99$

$\Rightarrow z_0 = 2{,}327$

Die t-Verteilung hat bei kleinerem Umfang eine größere Varianz als die Standardnormalverteilung. Je größer die Anzahl der FG wird, desto mehr nähert sich die
t-Verteilung der Normalverteilung an, bis sie, bei $f = \infty FG$ auf der Normalverteilung liegt.