## Aufgabe 11:

Vorbemerkung: Eine „**Zufallsvariable**" ist eine eindeutige Funktion bzw. eine Abbildungsvorschrift, die angibt, auf welche Art aus einem Elementarereignis eine reelle Zahl gewonnen wird.

z.B. Münzwurf: Kopf = 1
Zahl = 2 oder
z.B. 2 Würfel: Merkmal = Summe der Augenzahlen, also $x_{(1,4)} = 5$

hier: „Bilde die Summe der Augenzahlen der beiden Würfel!"

⇒ diskrete Zufallsvariable:
kann <u>endlich</u> viele verschiedene Werte annehmen $\left(x_1, \dots x_k\right)$

⇒ stetige Zufallsvariable:
kann <u>unendlich</u> viele verschiedene Werte annehmen

**Erwartungswert** $E(X) = \sum_{j=1}^{k} x_j \cdot f(x_j)$

z.B. mögliche Ereignisse bei <u>einem</u> Würfelwurf

$$E = \{1,2,3,4,5,6\} \text{ mit } f(x_i) = \frac{1}{6}$$

Erwartungswert

$$E(X) = \sum x_j \cdot f(x_j) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{j=1}^{6} x_j = \frac{1}{6} \cdot 21 = 3{,}5$$

**Varianz** $VAR(X) = \sum_{j=1}^{k} \left[x_i - E(X)\right]^2 \cdot f(x_j) = 2{,}917$

Lösung der Aufgabe:
a)
<u>1. Schritt:</u> Darstellung des Ergebnisraumes (Definitionsbereich von X)

mögliche Ereignisse bei <u>zwei</u> Würfeln

Ereignisraum:

{
(1,2) (1,1) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,2) (2,1) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,2) (3,1) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
(4,2) (4,1) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
(5,2) (5,1) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,2) (6,1) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)

}

$\Rightarrow$ 36 Elementarereignisse $e_i$

2. Schritt: Bestimmung des Wertebereiches von X

$\Rightarrow$ Definition des Zufallsereignisses $A_j$: „Gleiche Summe der Würfelaugen“

$$A_j = \{e_i | X(e_i) = x_j\}$$

Ereignisraum:

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ | $A_8$ | $A_9$ | $A_{10}$ | $A_{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | |
| | | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | |
| | | | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | |
| | | | | 6 | 7 | 8 | | | | |
| | | | | | 7 | | | | | |

$\Rightarrow$ Festlegung des Wertebereiches Z: Z={2,3,...,11,12}

3. Schritt: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $f(x_j)$

$\Rightarrow$ Eintrittswahrscheinlichkeiten von $A_j$:

$$P(A_j) = \frac{günstige\_Ereignisse}{ungünstige\_Ereignisse} = \frac{e_i}{e_i}$$

$$P(A_j) = \{e_i | X(e_i) = x_j\}$$

**„Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x$_j$)“** einer diskreten Zufallsvariable

Eine allgemein angegebene Zuordnungsvorschrift, nach der jedem Wert einer diskreten Zufallsvariablen eine entsprechende Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird, heißt „Wahrscheinlichkeitsfunktion“.

$f(x_j) = p(X = x_j)$ mit $f(x_j) \geq 0$ und $\sum f(x_j) = 1$

$$f(x_1) = p(x=2) = P(A_1) = \frac{1}{36} \qquad f(x_7) = p(x=8) = P(A_7) = \frac{5}{36}$$

$$f(x_2) = p(x=3) = P(A_2) = \frac{2}{36} \qquad f(x_8) = p(x=9) = P(A_8) = \frac{4}{36}$$

$$f(x_3) = p(x=4) = P(A_3) = \frac{3}{36} \qquad f(x_9) = p(x=10) = P(A_9) = \frac{3}{36}$$

$$f(x_4) = p(x=5) = P(A_4) = \frac{4}{36} \qquad f(x_{10}) = p(x=11) = P(A_{10}) = \frac{2}{36}$$

$$f(x_5) = p(x=6) = P(A_5) = \frac{5}{36} \qquad f(x_{11}) = p(x=12) = P(A_{11}) = \frac{1}{36}$$

$$f(x_6) = p(x=7) = P(A_6) = \frac{6}{36}$$

$\Rightarrow$ Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{j=1}^{k} x_j \cdot f(x_j)$$

$$E(X) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36}$$

$$+10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36}$$

$$E(X) = \frac{252}{36} = 7$$

E(X) entspricht dem Mittelwert der Verteilung.

<u>4. Schritt</u>: Tabellarische Darstellung und Arbeitstabelle

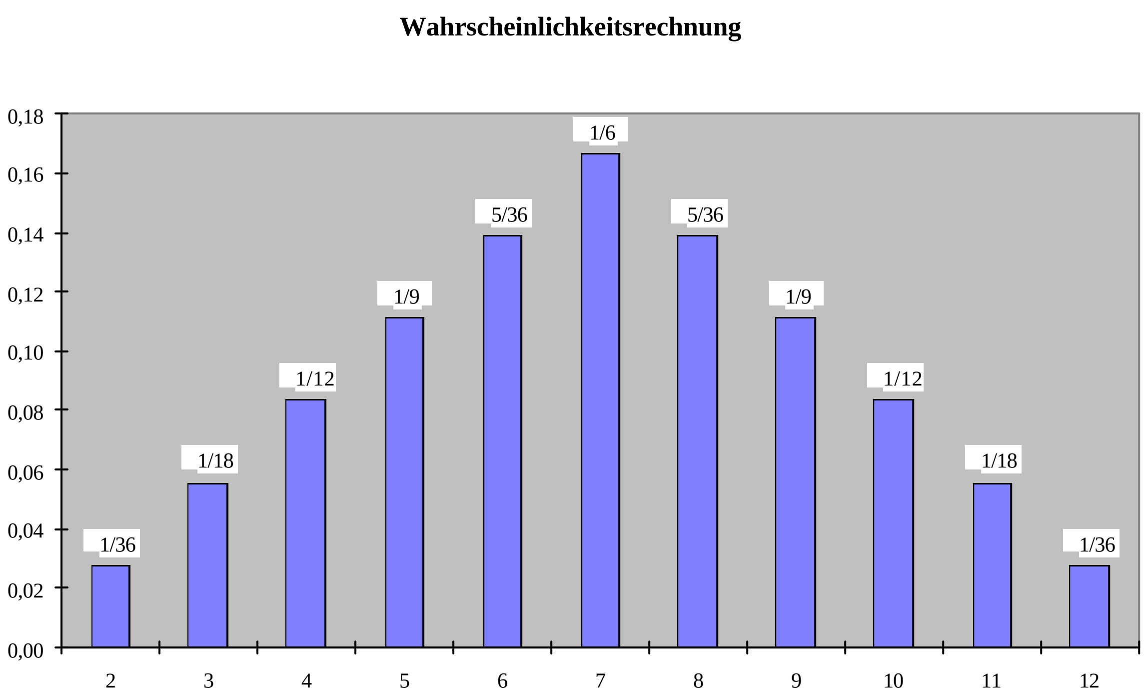
| $x_i$ | $f(x_j)$ | $F(x_j)$ | $x_i \cdot f(x_i)$ | $x_i - E(X)$ | $\left[x_i - E(X)\right]^2 \cdot f(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1/36 | 1/36 | 2/36 | -5 | 25/36 |
| 3 | 2/36 | 3/36 | 6/36 | -4 | 32/36 |
| 4 | 3/36 | 6/36 | 12/36 | -3 | 27/36 |
| 5 | 4/36 | 10/36 | 20/36 | -2 | 16/36 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5/36 | 15/36 | 30/36 | -1 | 5/36 |
| 7 | 6/36 | 21/36 | 42/36 | 0 | 0 |
| 8 | 5/36 | 26/36 | 40/36 | 1 | 5/36 |
| 9 | 4/36 | 30/36 | 36/36 | 2 | 16/36 |
| 10 | 3/36 | 33/36 | 30/36 | 3 | 27/36 |
| 11 | 2/36 | 35/36 | 22/36 | 4 | 32/36 |
| 12 | 1/36 | 36/36 | 12/36 | 5 | 25/36 |
| S | **1** | | $E(X) = 7$ | **0** | $VAR(X) = 5{,}833$ |

$\Rightarrow$ Varianz:

$$VAR(X) = 5{,}833$$

Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion:



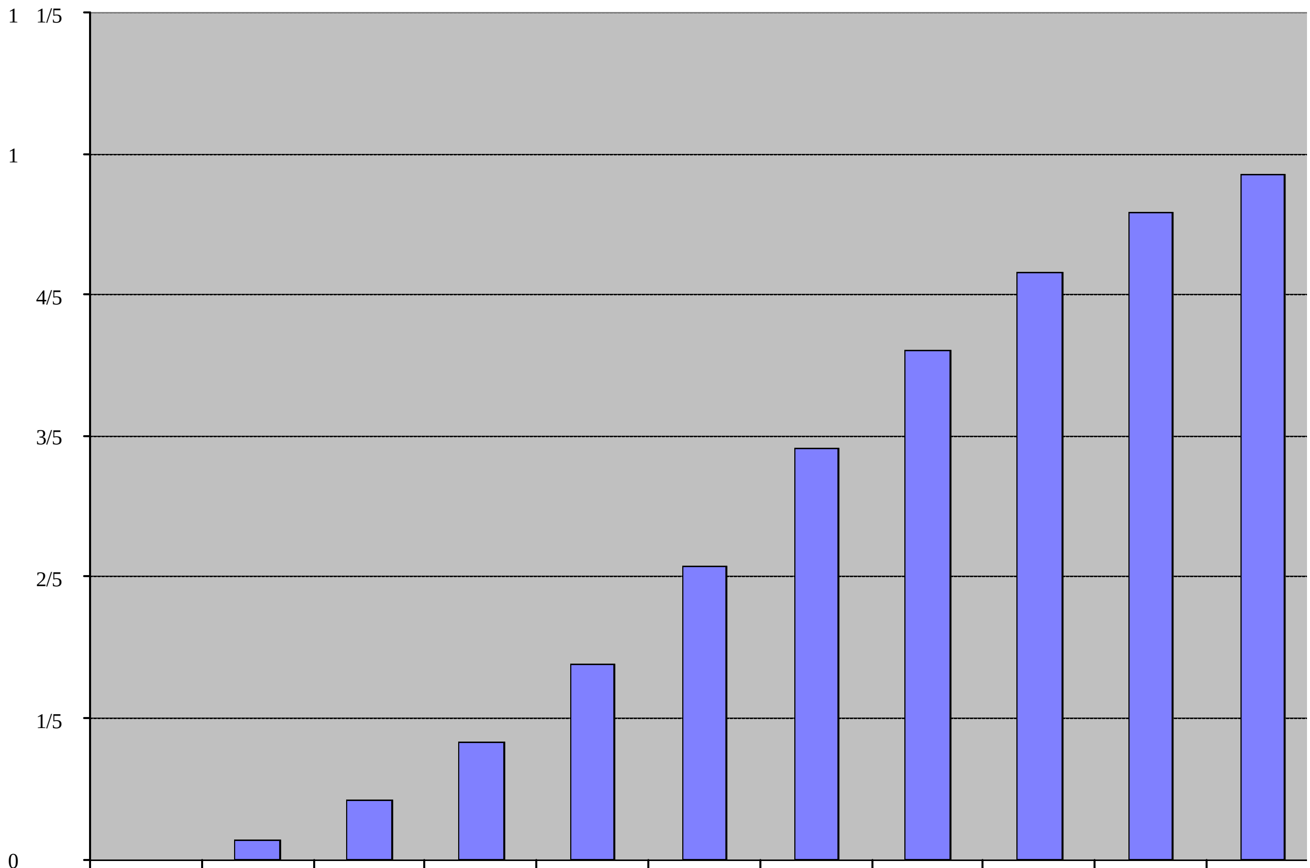

**„Verteilungsfunktion“** einer diskreten Zufallsvariablen:

Als „Verteilungsfunktion“ $F(x_i)$ einer Zufallsvariablen X bezeichnet man die Funktion, die die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß die Zufallsvariable X höchstens den Wert x annimmt, also beschreibt sie die Wahrscheinlichkeit, daß X kleiner gleich ($\leq$) $x_i$ ist.

$F(x_i) = p(x \le x_i) = \sum f(x_i)$ (analog zur Summenhäufigkeitsfunktion)

$$
F(x)=\begin{cases}
0 & (x<2)\\
1/36 & (x<3)\\
3/36 & (x<4)\\
1/6 & (x<5)\\
10/36 & (x<6)\\
15/36 & (x<7)\\
7/12 & (x<8)\\
13/18 & (x<9)\\
5/6 & (x<10)\\
11/12 & (x<11)\\
35/36 & (x<12)
\end{cases}
$$
1 (x≤12)

**Verteilungsfunktion**




| | <2 | x<3 | x<4 | x<5 | x<6 | x<7 | x<8 | x<9 | x<10 | x<11 | x<12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reihe1 | 0 | 1/36 | 1/12 | 1/6 | 5/18 | 5/12 | 7/12 | 13/18 | 5/6 | 11/12 | 35/36 |

**b)** wie hoch müßte der Einsatz mindestens sein?

Der Einsatz müßte dem Erwartungswert entsprechen, damit die Bank ohne Gewinn und Verlust spielt, also

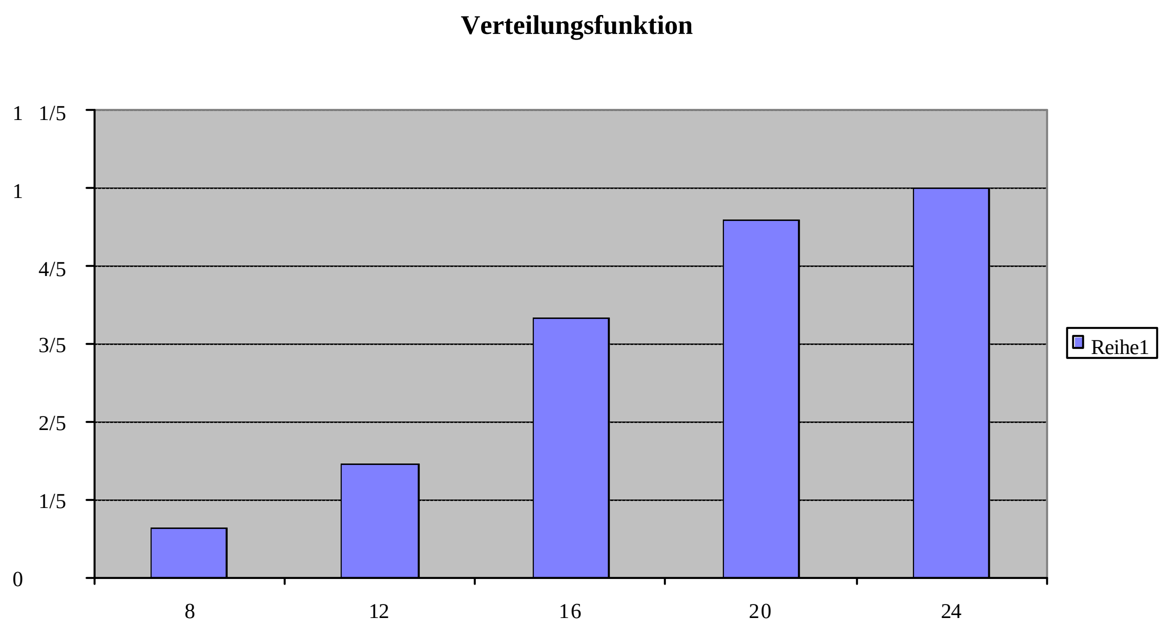
$$E(X) = \sum_{j=1}^{k} x_j \cdot f(x_j) = 7$$

## Aufgabe 12:

Tabelle:

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $F(x_j)$ | $x_i \cdot f(x_i)$ | $x_i - E(X)$ | $[x_i - E(X)]^2 \cdot$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 3/24 | 3/24 | 1 | -8 | 8 |
| 12 | 4/24 | 7/24 | 2 | -4 | 2,67 |
| 16 | 9/24 | 16/24 | 6 | 0 | 0 |
| 20 | 6/24 | 22/24 | 5 | 4 | 4 |
| 24 | 2/24 | 24/24 | 2 | 8 | 5,33 |
| S | **1** | | $E(X) = 16$ | **0** | $VAR(X) = 20$ |

Zeichnung der Verteilungsfunktion:




## Aufgabe 13:

Der Gewinn wird der Einfachheit halber als Einnahmen - Ausgaben definiert. Für die Lösung sind also die Einnahmen der Versicherung den entsprechenden Ausgabeerwartungen gegenüberzustellen. Der Saldo ist dann der Gewinn bzw. Verlust der Versicherung.

Die Einnahmen ergeben sich aus der Versicherungsprämie:

$E = 450,-DM$

Die Ausgabeerwartung der Versicherung ist der Auszahlungsbetrag der Versicherung für das multipliziert mit der Sterbewahrscheinlichkeit des Versicherungsnehmers, also

$E_{(Tod)} = 60000 \cdot 0{,}004 = 240{,}00DM$

Berechnet man die zu erwartende Auszahlung als Erwartungswert der Zufallsvariablen X (Auszahlungsbetrag) mit $x_1 = 0$ im Überlebensfall und $x_2 = 60000$ im Sterbefall, so ergibt sich:

$E(X) = \sum x_i \cdot f(x_i) = 0 \cdot 0{,}996 + 60000 \cdot 0{,}004 = 240{,}00DM$

Der erwartete Gewinn beträgt also

G = 450,00DM - 240,00DM = 210,00DM

## Aufgabe 14:

Eine Dichtefunktion hat die Eigenschaft, daß die Fläche unter ihrer Kurve den Wert 1 hat, also $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, deshalb muß gelten

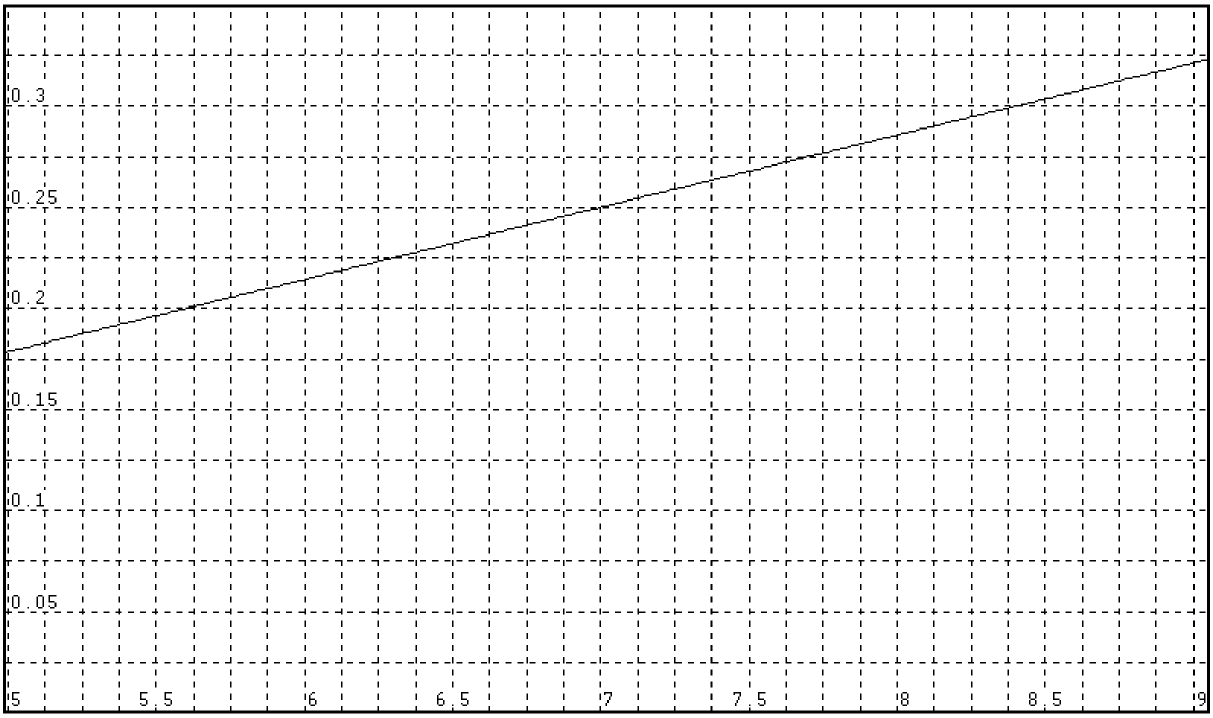
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_5^9 k \cdot xdx = k \cdot \int_5^9 xdx = k \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_5^9$$

$$1 = k \cdot \left(\frac{9^2}{2} - \frac{5^2}{2}\right) = k \cdot \left(\frac{81-25}{2}\right) = k \cdot 28$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{28}$$

Graphische Darstellung der Dichtefunktion:

f(x)

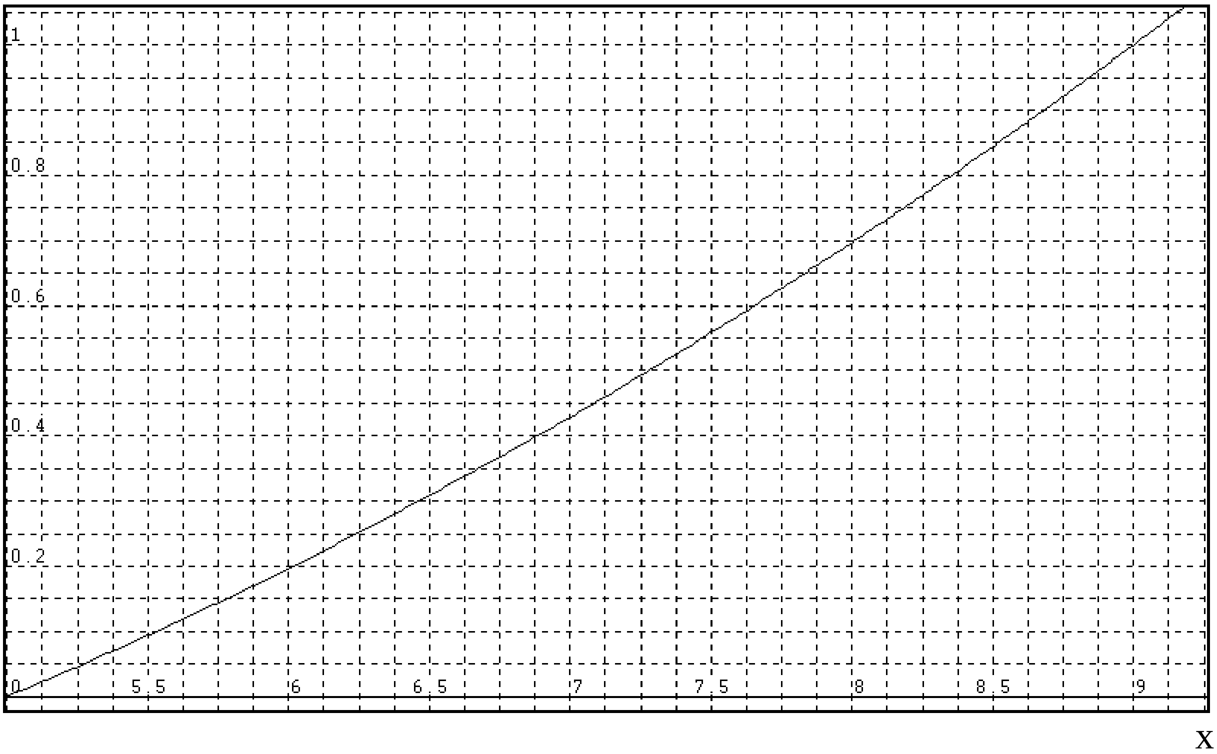



Die Verteilungsfunktion erhält man für $5 \le x \le 9$ als

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)dv = \int_{5}^{x} (\frac{1}{28} \cdot v)dv = \frac{1}{28} \cdot \left[\frac{v^2}{2}\right]_5^x = \frac{1}{28} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5^2}{2}\right) = \frac{1}{56}\left(x^2 - 25\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < 5 \\ \frac{1}{56} \cdot \left(x^2 - 25\right) & \textit{für} \quad 5 \le x \le 9 \\ 1 & \textit{für} \quad x > 9 \end{cases}$$

Graphische Darstellung der Verteilungsfunktion:
f(x)




**Median** der Funktion:
Der Median ist der Wert, der die Verteilung in zwei gleiche Hälften teilt, also der x-Wert, bei dem die Verteilungsfunktion den Wert 0,5 hat.
D.h.

$$F(x) = \frac{1}{56} \cdot \left(x^2 - 25\right)$$

$$0{,}5 = \frac{1}{56} \cdot \left(x^2 - 25\right)$$

$$\Leftrightarrow 28 = x^2 - 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 53$$

$$\Leftrightarrow x = Med. = \sqrt{53} = 7{,}28$$

**Erwartungswert** der Funktion:

$$E(x) = \int_5^9 x \cdot f(x)dx = \int_5^9 (x \cdot \frac{1}{28} \cdot x)dx = \int_5^9 \frac{1}{28} x^2 dx = \left[\frac{1}{84} x^3\right]_5^9 = 8{,}678 - 1{,}488 = 7{,}19$$

**Varianz** der Funktion:

$$VAR(x) = \int_5^9 x^2 \cdot f(x)dx - E(x)^2 = \int_5^9 \frac{1}{28} x^3 dx - 7{,}19^2 = \left[\frac{1}{112} x^4\right]_5^9 - 7{,}19^2 = 58{,}58 - 5{,}58 - 7{,}19^2 = 1{,}304$$

## Aufgabe 15:

Die Wahrscheinlichkeit, daß Papageien das Sprechen erlernen, ist binomialverteilt. Die Binomialverteilung zählt zu den diskreten Verteilungen. Sie gilt für zweiwertige Zufallsgrößen, d.h., die Variablen haben genau zwei Realisationsmöglichkeiten (sprechen/nicht sprechen). Diesen dichotomen (zweigeteilten) Variablen liegen einander komplementäre Ereignisse zugrunde.

Das günstige Ereignis wird mit der Wahrscheinlichkeit „p“ belegt, wobei $0 \leq p \leq 1$ ist. Das komplementäre Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit „q“. Da nur diese beiden Realisationsmöglichkeiten existieren, teilt sich die „Gesamtwahrscheinlichkeit“ auf in „p“ und „q“ $\Rightarrow p+q=1$
Die Wahrscheinlichkeit, bei Durchführung einer „Bernoulli-Kette“ der Länge „n“ genau „k“ Treffer zu erzielen, ist gegeben durch die Formel
$B_{(n,k,p)} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{(n-k)}$ (Herleitung der Formel auf S. 249)

**a)** genau 2 von 5 Vögeln sollen singen können

$$B_{(n,k,p)} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{(n-k)} \text{ , also}$$
$$p_{(2\,günstige)} = \binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot (1-0{,}4)^{(5-2)} = \left(\frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!}\right) \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3$$
$$p_{(2\,günstige)} = 10 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}216 = 0{,}3456$$

(vgl. mit dem Tabellenwert)

Wolfgang A. kann mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3456 damit rechnen, daß zwei seiner Vögel das Sprechen lernen.

**b)** Wahrscheinlichkeit, daß <u>keiner</u> sprechen kann, ergibt sich als:

$$B_{(5;0;0,4)} = \binom{5}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}07776 = 0{,}07776$$

**c)** Wahrscheinlichkeit, daß <u>wenigstens einer</u> begabt ist.

„Wenigstens einer“ bedeutet, daß 1,2,3,4 oder sogar alle 5 das Sprechen erlernen. Das Ergebnis errechnet sich also aus der Addition der Einzelwahrscheinlichkeiten für 1,2,3,4 oder 5 Sprecher, oder als $1 - B_{(5;0;0,4)}$, dem „sicheren Ereignis“ abzüglich der Wahrscheinlichkeit dafür, das keiner das Sprechen erlernt.

$$1-B_{(5;0;0,4)}=1-\left(\binom{5}{0}\cdot 0{,}4^0\cdot 0{,}6^5\right)1-0{,}07776=0{,}92224$$

Mit 92,224%iger Sicherheit kann mindestens einer der Vögel sprechen.

**d)** Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz der Binomialverteilung

Erwartungswert: $E(x)=n\cdot p=5\cdot 0{,}4=2$
Varianz: $VAR(x)=n\cdot p\cdot q=5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=1{,}2$

## Aufgabe 16:

Die Wahrscheinlichkeit p, daß jemand der den Laden betritt etwas kauft, beträgt 0,2. Es betreten $n=5$ Kunden den Laden.

**a)** Wahrscheinlichkeit, daß keiner kauft

$$B_{(5;0;0,2)}=\binom{5}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5=1\cdot 1\cdot 0{,}32768=0{,}32768$$

**b)** Wahrscheinlichkeit, daß 2 oder 3 einen Anzug kaufen:

$$p_{(2\,oder\,3)}=B_{(5;2;0,2)}+B_{(5;3;0,2)}=\binom{5}{2}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^3+\binom{5}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2=0{,}2048+0{,}0512=0{,}256$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 25,6%.

**c)** Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens einer einen Anzug kauft

entspricht entweder der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten für 1,2,3,4 und 5 Käufer, oder
1-(Wahrscheinlichkeit für keinen Kunden), also

$$1-B_{(5;0;0,2)}=1-\left(\binom{5}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5\right)=1-0{,}32768=0{,}67232$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 67,232%.

**d)** Wahrscheinlichkeit, daß alle einen Anzug kaufen, beträgt

$$B_{(5;5;0,2)}=\left(\binom{5}{5}\cdot 0{,}2^5\cdot 0{,}8^0\right)=1\cdot 0{,}00032\cdot 1=0{,}00032$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,032%.

**Erwartungswert und Varianz bei n= 20 Kunden:**

$E(x) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}2 = 4$ Kunden (4 von 20 Kunden werden im ∅ einen Anzug kaufen)
$VAR(x) = n \cdot p \cdot q = 20 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$ Kunden.